PROCESAREA SEMNALELOR - CURS 06

FILTRARE, WAVELETS

Cristian Rusu

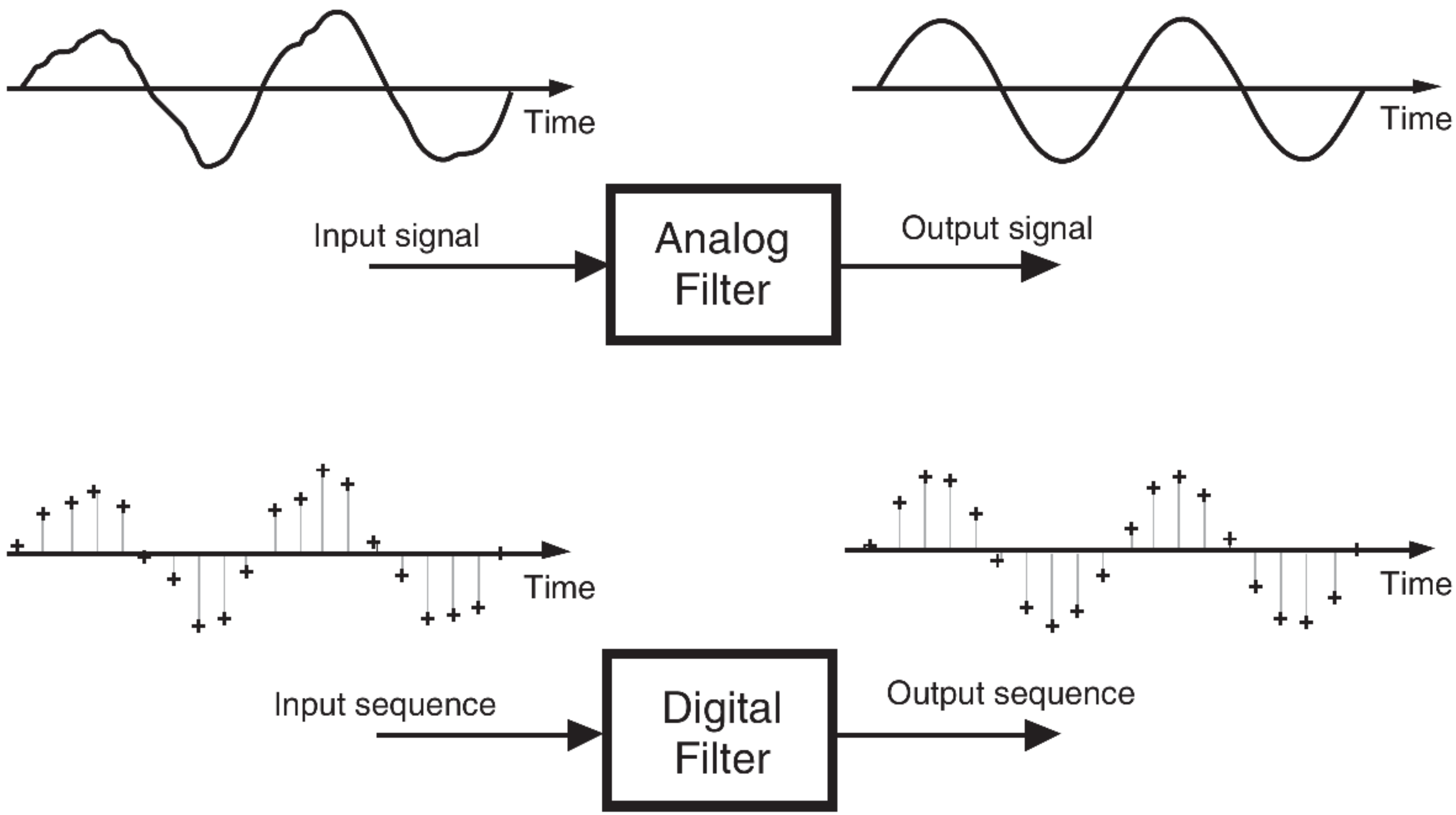
CUPRINS

- filtrare
- tipuri de filtre și ferestre
- wavelets
- referințe bibliografice

FILTRARE

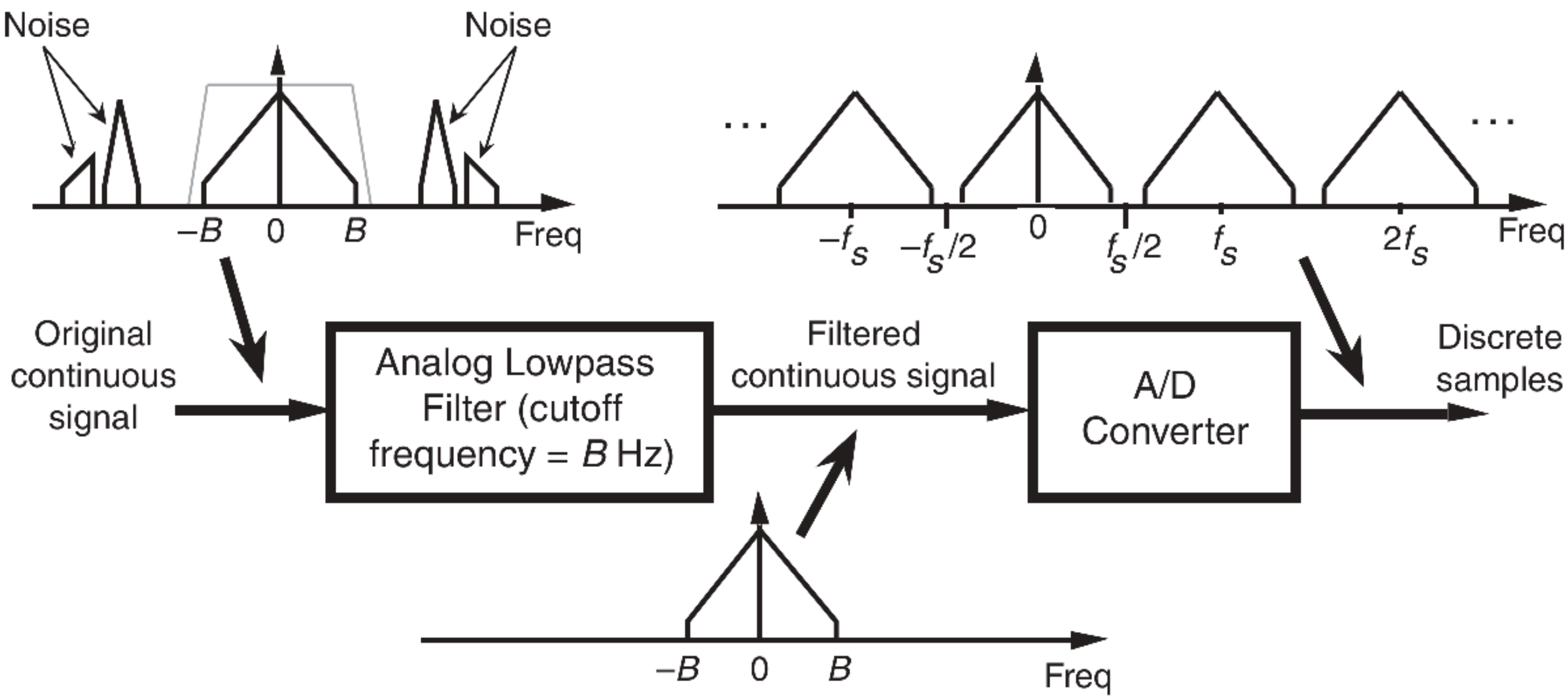
- filtrarea reprezintă prelucrarea unui semnal în domeniul timpului ce induce o schimbare în componența spectrală

- Schimbarea constă în reducerea sau eliminare anumitor componente: filtrele permit anumitor frecvențe să treacă și le atenuează pe restul



FILTRARE: EXEMPLU

- filtru trece-jos este un filtru care acceptă componentele în frecvență mai mică de o bandă B și le elimină sau atenuează pe cele mai mari decât B



FILTRARE: EXEMPLU

- filtrele digitale sunt tot semnale discretizate și sunt notate cu $h[n]$
- semnalele de intrare le vom nota cu $x[n]$

- filtrele sunt de două tipuri
  - **Finite Impulse Response (FIR)**
    - folosește valorile precedente din $x[n]$
    - are un suport finit
    - folosește operații aritmetice simple

  - **Infinite Impulse Response (IIR)**
    - folosește valorile precedente din $x[n]$
    - folosește valorile precedente ale procesului de filtrare
    - reprezintă relații de recurență
    - implementează *bucle de feedback*

FILTRARE: FIR

- dat un număr finit de intrări nenule $x[n]$, aplicarea unui filtru FIR $h[n]$ va duce tot timpul la o ieșire $y[n]$ ce conține un număr finit de eșantioane nenule

- exemplu banal:
  - fie o aplicație ce contorizează traficul pe un pod
  - în fiecare minut primim numărul de mașini ce au traversat podul
  - vrem să calculăm media mobilă într-un interval de timp (fereastră) de 5 minute

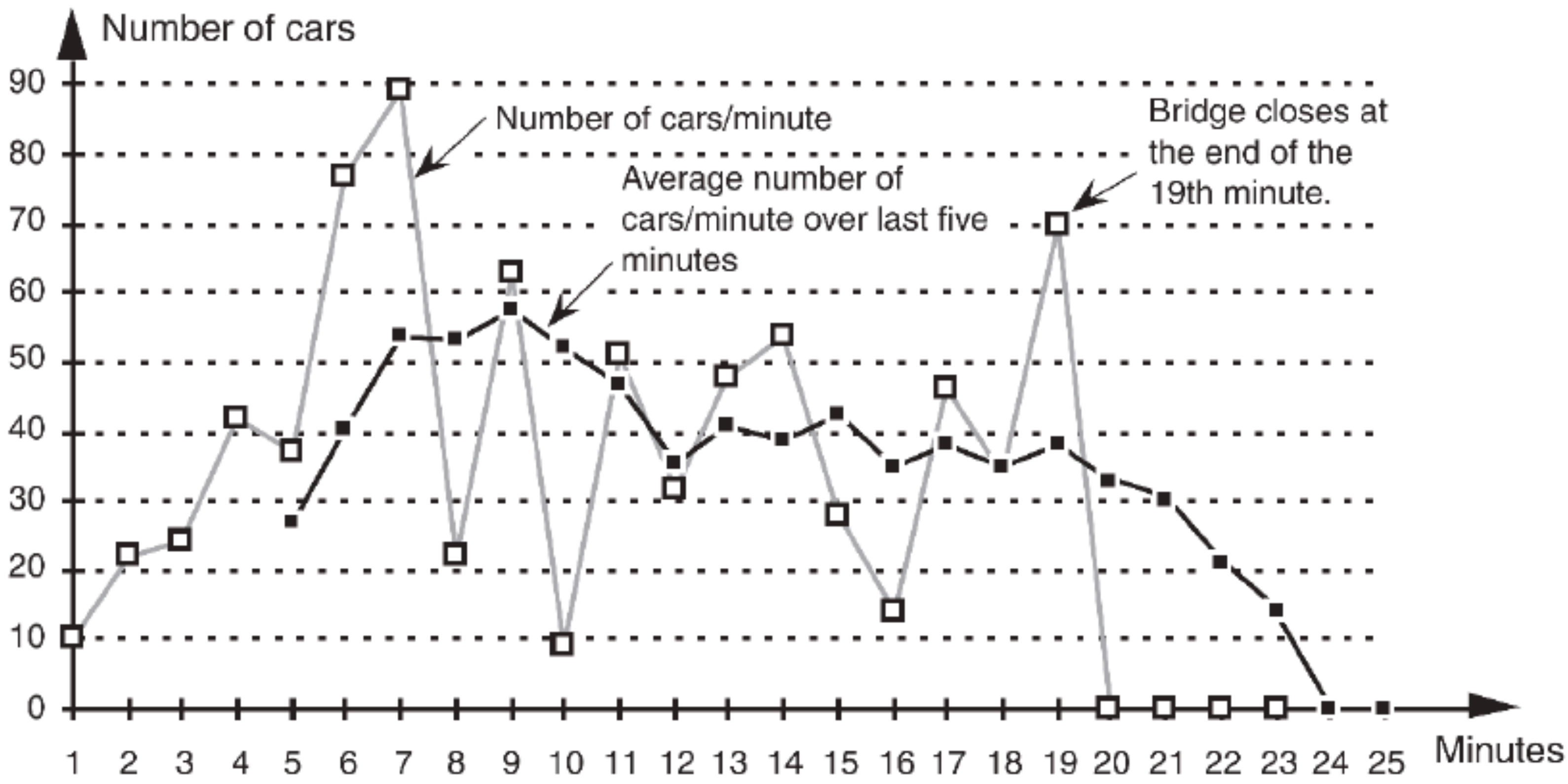
FILTRARE: EXEMPLU FIR (MEDIE MOBILĂ)

Minut	Nr. mașini	Media per 5 min.
1	10	-
2	22	-
3	24	-
4	42	-
5	37	27
6	77	40.4
7	89	53.8
8	22	53.4
9	63	57.6
10	9	52

$$\frac{10}{5} = 2$$
$$\frac{10+22}{5} = 6.4$$
$$\frac{10+22+24}{5} = 11.2$$
$$\frac{10+22+24+42}{5} = 19.6$$
$$\frac{10+22+24+42+37}{5} = 27$$
$$\frac{22+24+42+37+77}{5} = 40.4$$
$$\vdots$$
$$\frac{77+89+22+63+9}{5} = 52$$

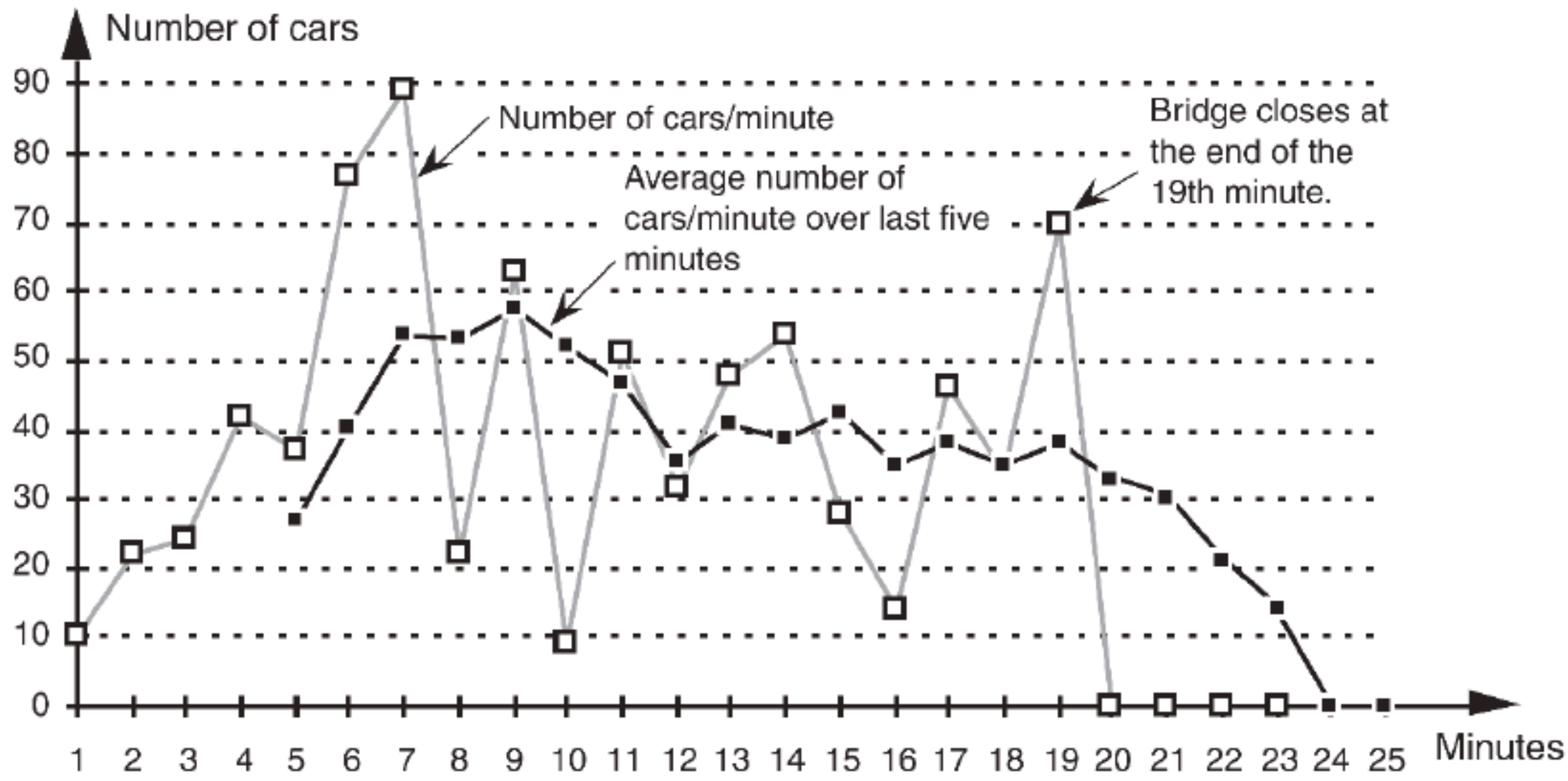
FILTRARE: EXEMPLU FIR (MEDIE MOBILĂ)

- care frecvențe sunt filtrate?



FILTRARE: EXEMPLU FIR (MEDIE MOBILĂ)

- este un filtru trece-jos



FILTRARE: EXEMPLU FIR (MEDIE MOBILĂ)

- ieșirea 5 este calculată în funcție de ultimele 5 intrări:

$$y[5] = \frac{1}{5}(x[5] + x[4] + x[3] + x[2] + x[1])$$

- formula generală la pasul n este:

$$y[n] = \frac{1}{5}(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4])$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{k=n-4}^{n} x[k]$$

- scris echivalent:

$$y[n] = \frac{1}{5}x[n] + \frac{1}{5}x[n-1] + \frac{1}{5}x[n-2] + \frac{1}{5}x[n-3] + \frac{1}{5}x[n-4]$$

$$= \sum_{k=n-4}^{n} \frac{1}{5}x[k]$$

convoluție

FILTRARE: EXEMPLU FIR (MEDIE MOBILĂ)

- semnalul filtrat:

$$y[n] = \frac{1}{5}x[n] + \frac{1}{5}x[n-1] + \frac{1}{5}x[n-2] + \frac{1}{5}x[n-3] + \frac{1}{5}x[n-4]$$

$$= \sum_{k=n-4}^{n} \frac{1}{5}x[k]$$

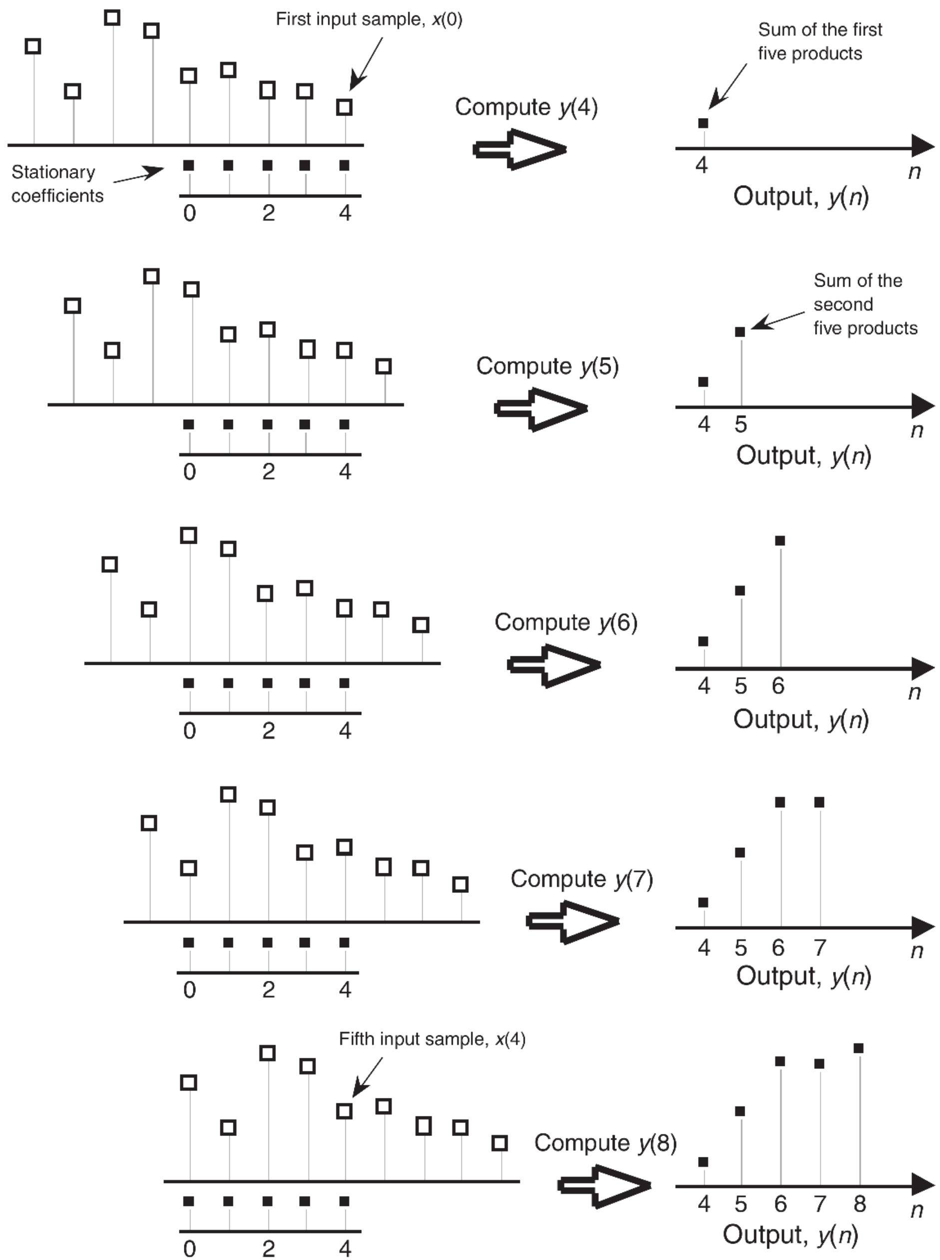
- în memorie păstrăm doar ultimele 5 valori ale semnalului

- se aruncă mereu cea mai veche valoare a semnalului
    - semnalul este deplasat mereu către dreapta
    - filtrul transversal

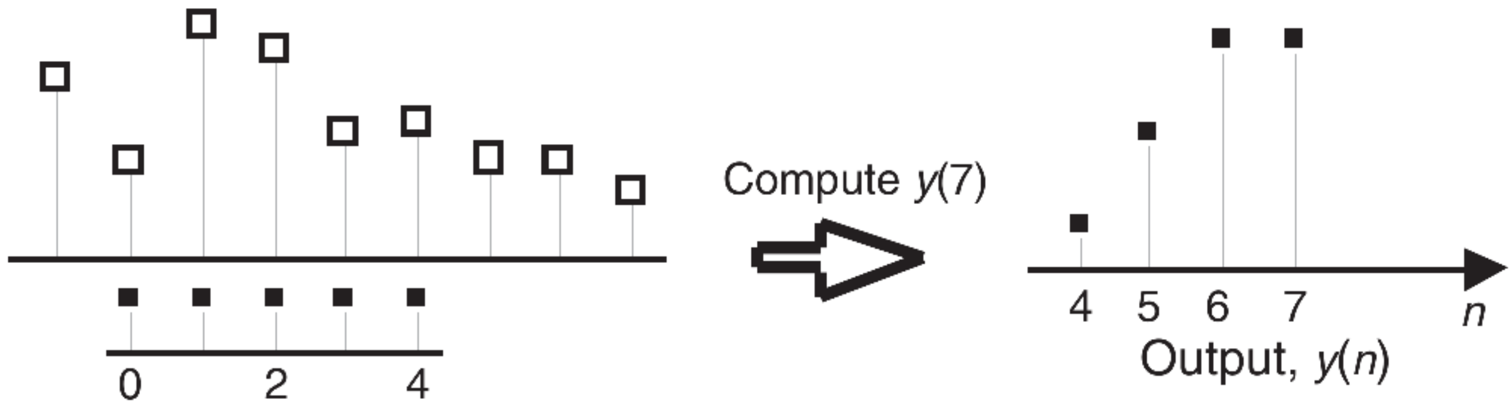
- intrările $x[n]$ se numesc *taps*

- ponderile care înmulțesc $x[n]$ se numesc *coeficienții filtrului*

FILTRARE: EXEMPLU FIR (MEDIE MOBILĂ)



FILTRARE



- semnalul este reprezentat prin *taps* $x[0], x[1], x[2], \ldots$
- filtrul este reprezentat prin coeficienții $h[0], h[1], h[2], \ldots$

- rezultatul, în general, este dat de

$$y[n] = h[4]x[n-4] + h[3]x[n-3] + h[2]x[n-2] + h[1]x[n-1] + h[0]x[n]$$

$$= \sum_{k=0}^{4} h(k)x(n-k)$$

FILTRARE

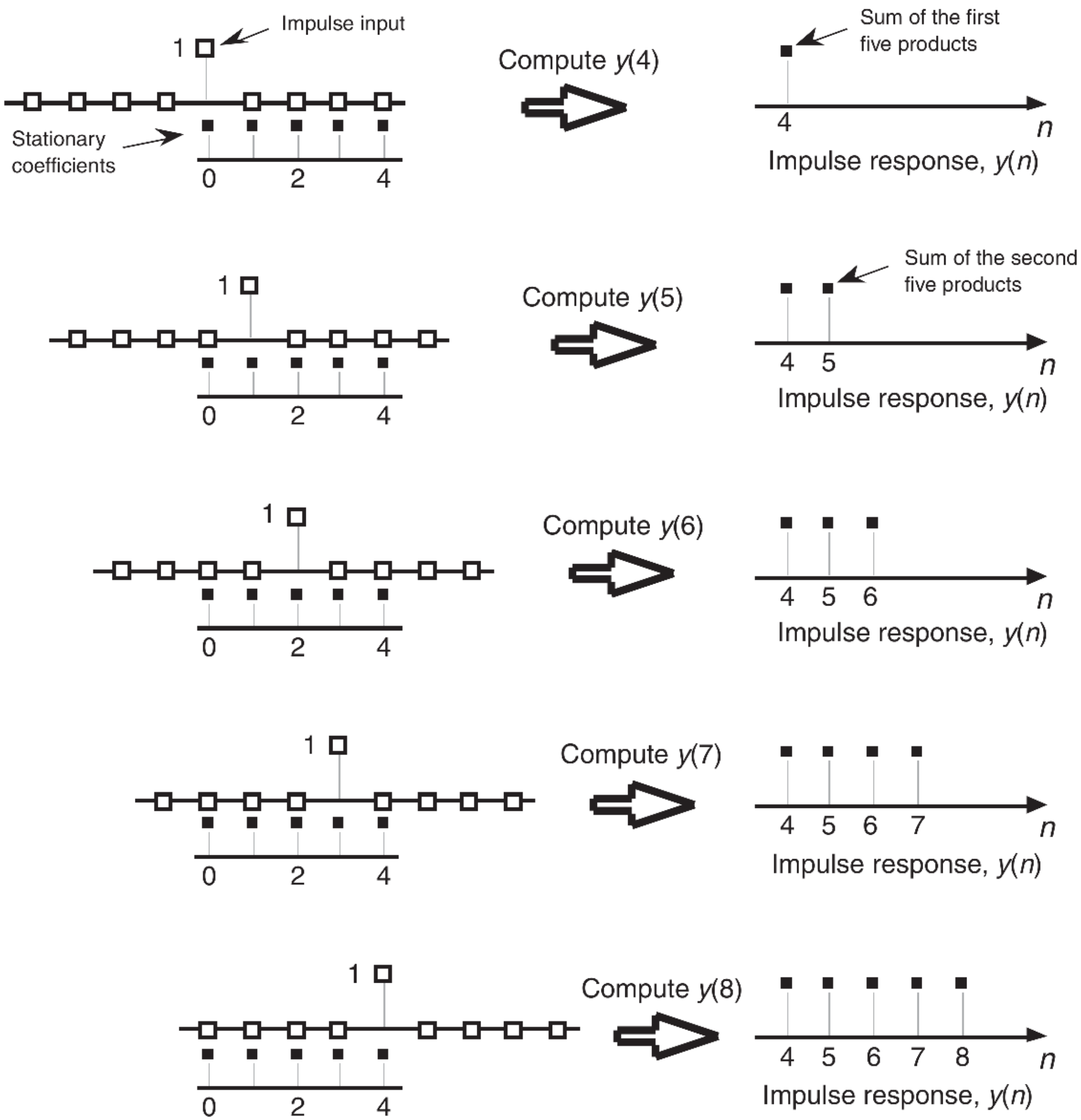
- cazul general pentru un filtru FIR cu M tap-uri ieșirea n este:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$$

- observați:
  - inversarea ordinii axei timpului pentru $x[n]$
  - iterația deplasează de la dreapta la stânga coeficienții filtrului $h[n]$
  - pentru fiecare intrare nouă din $x[n]$ efectuăm suma produselor pentru a produce o ieșire $y[n]$
  - similar cu operația DOT la înmulțirea matricelor
- vom scrie:

$$y[n] = h[k] * x[n]$$

FILTRARE: EXEMPLU



iesirile sunt chiar coeficienții filtrului

TEOREMA DE CONVOLUȚIE

- Transformata Fourier Discretă (DFT) a convoluției dintre răspunsului la impuls a unui filtru (a coeficienților și o secvență de M taps este egală cu produsul dintre DFT-ul intrării și DFT-ul răspunsului la impuls a filtrului

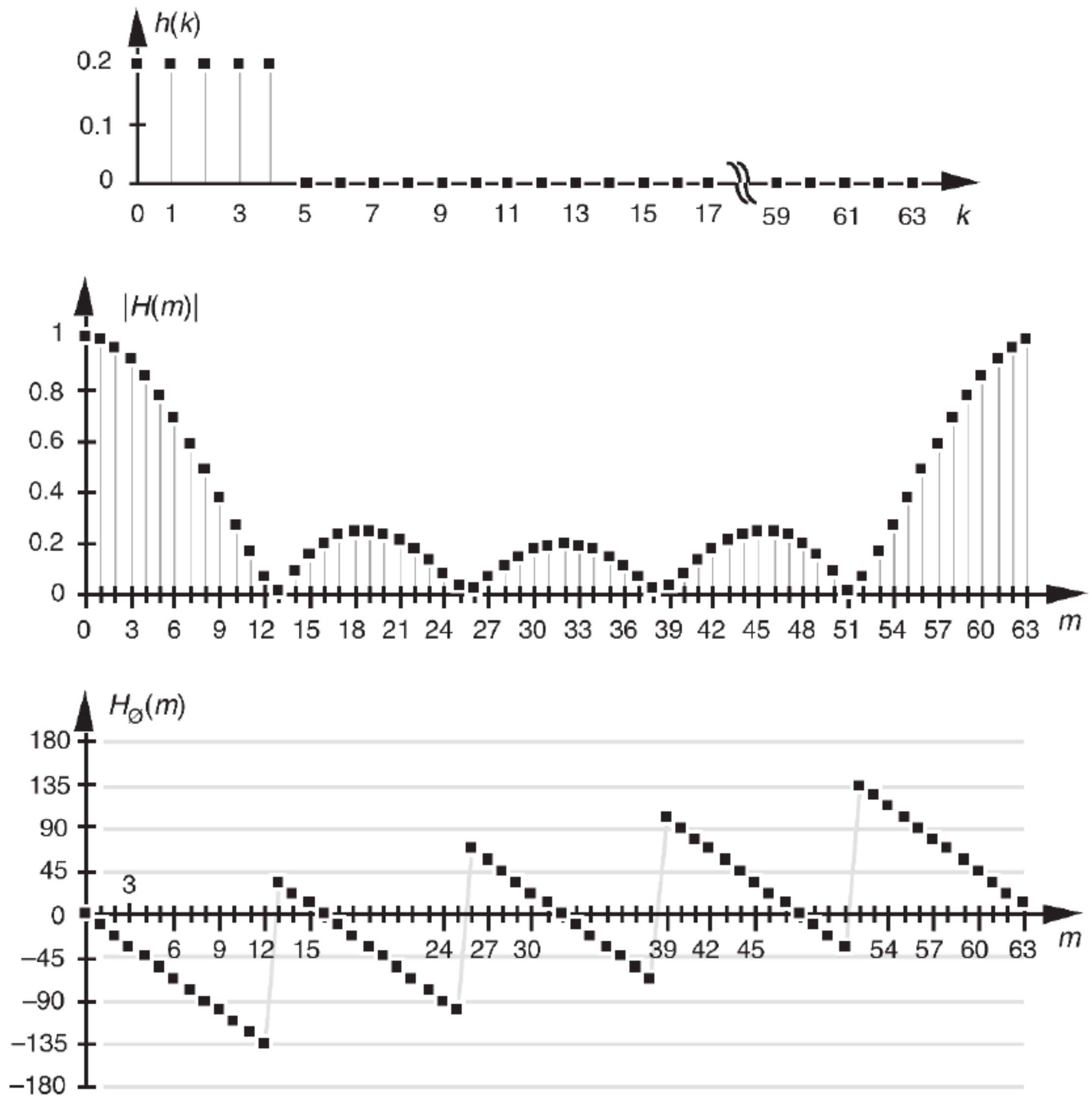
$$y[n] = h[n] * x[n] \overset{\text{FFT/IFFT}}{\Longleftrightarrow} Y[m] = H[m]X[m]$$

- convoluția în domeniul timpului este produs în domeniul frecvenței!
- produsul în domeniul timpului este convoluție în domeniul frecvenței!

TEOREMA DE CONVOLUȚIE: DEMONSTRAȚIE

$$
\begin{aligned}
Y[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j2\pi mn/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi mn/N} \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] e^{-j2\pi mn/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k] e^{-j2\pi mn/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \sum_{n=0}^{N-1} x[n-k] e^{-j2\pi mn/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} h[k] e^{-j2\pi mk/N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi mn/N} \\
&= H[m]X[m]
\end{aligned}
$$

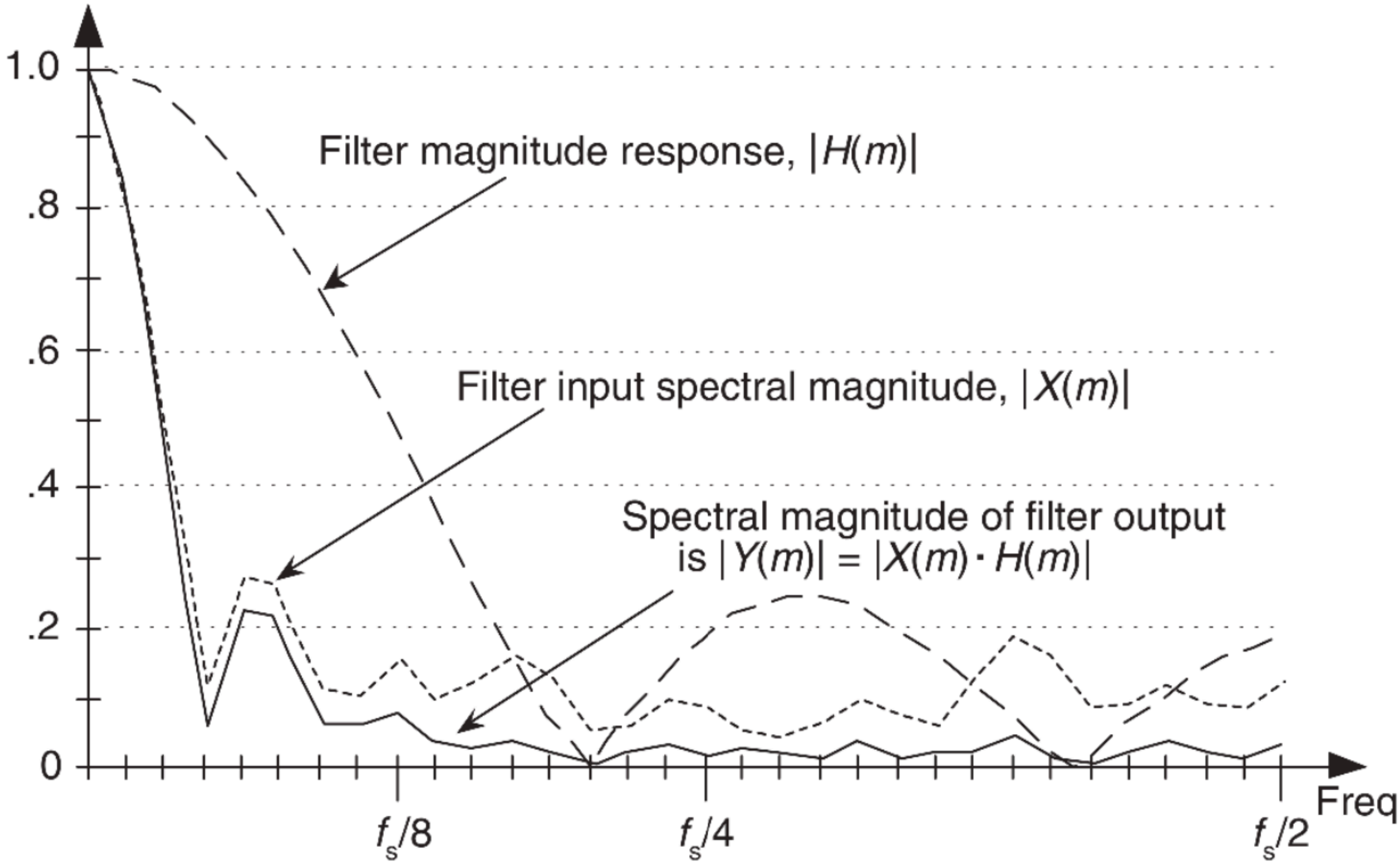
CUM ARATĂ FILTRUL DE MEDIERE



.

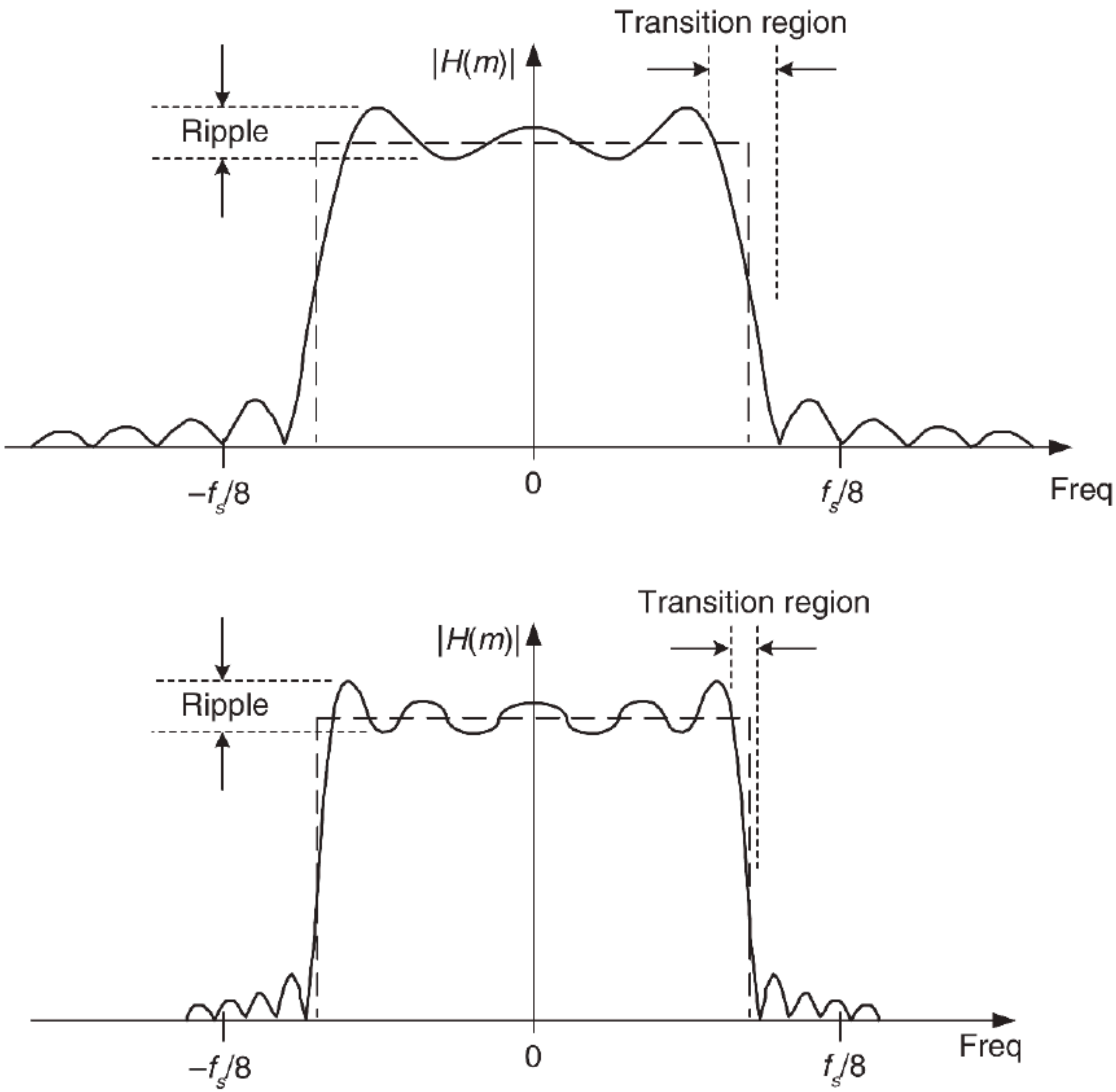
CUM ARATĂ FILTRUL DE MEDIERE

- filtrul atenuează frecvențele înalte



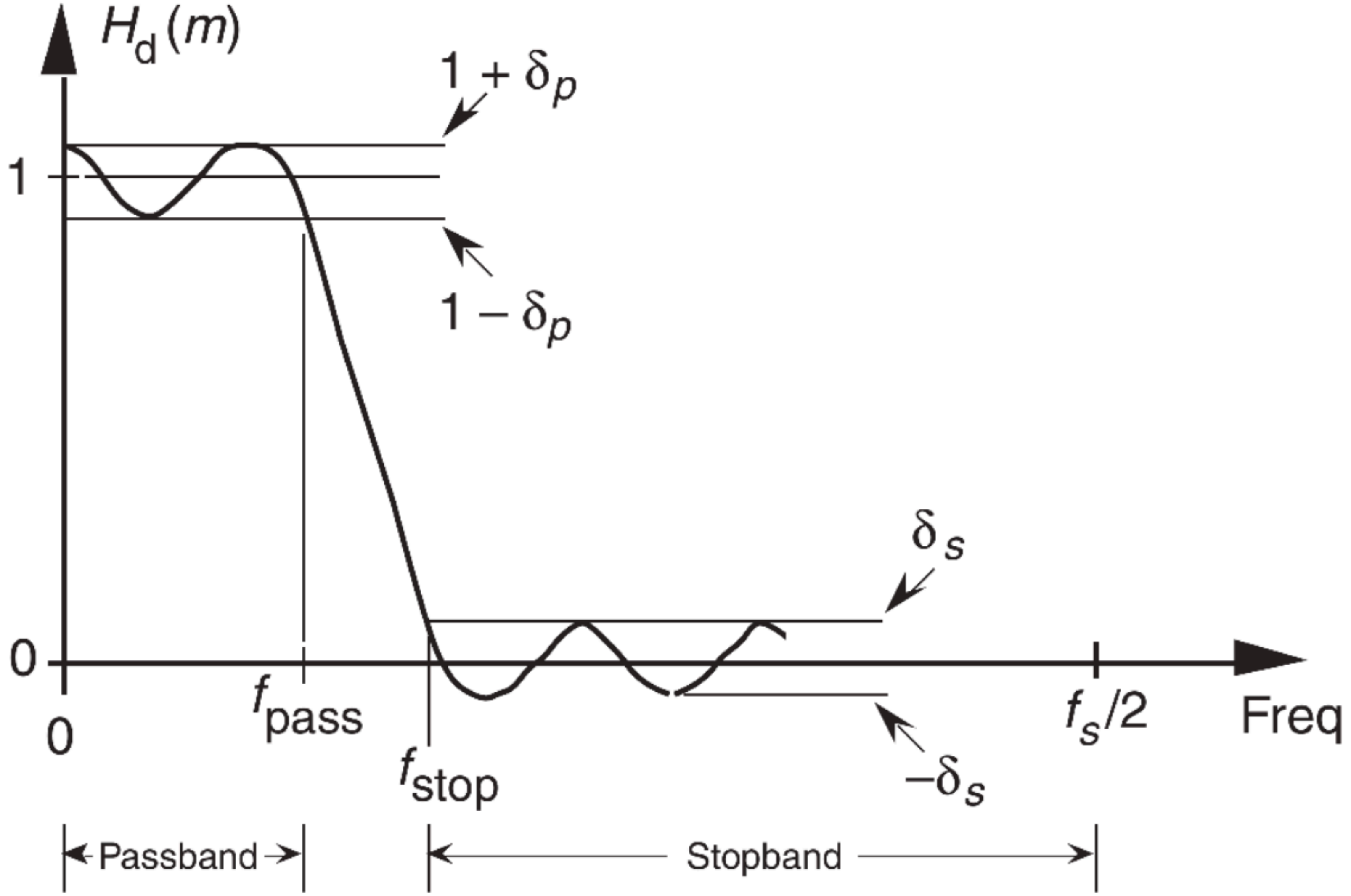
CUM PROIECTĂM FILTRE

- metode de optimizare



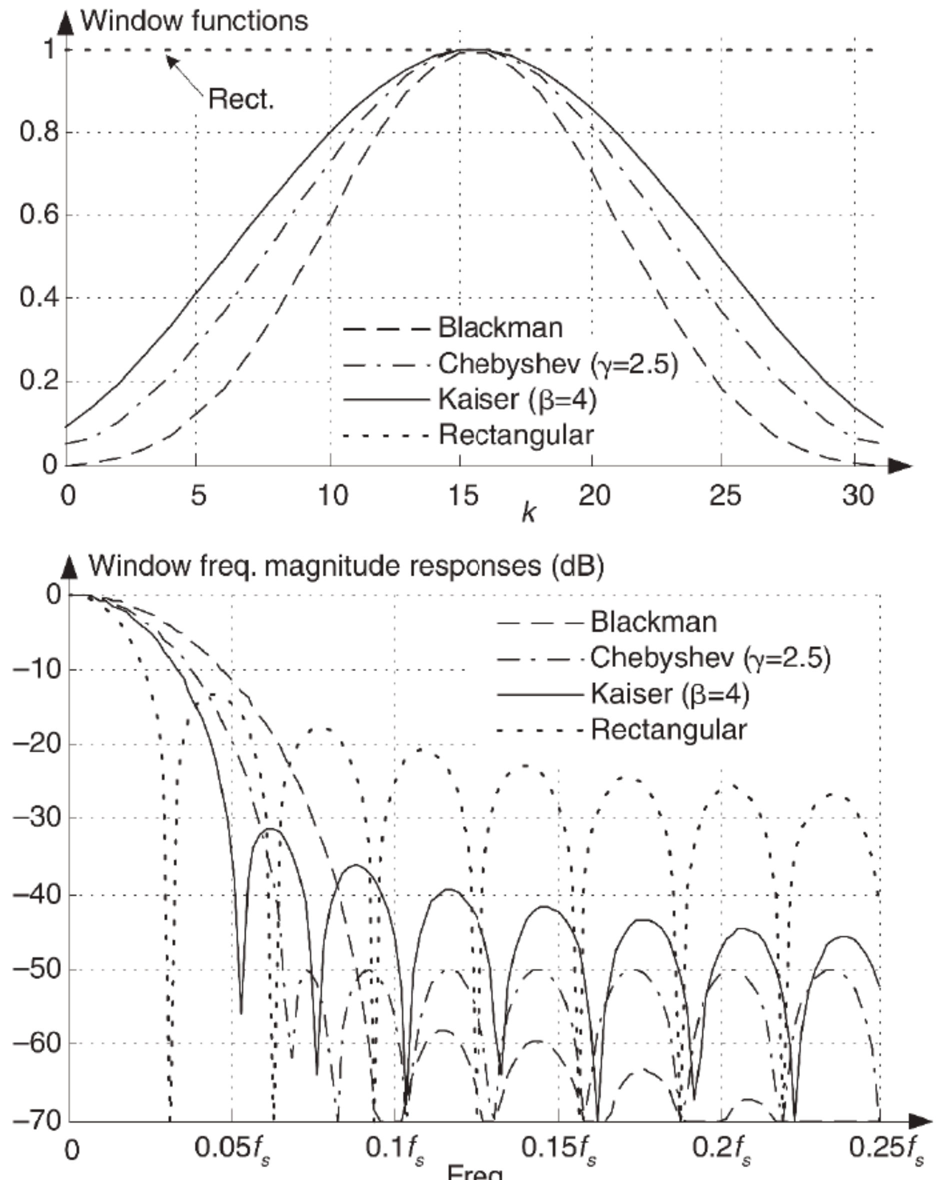
CUM PROIECTĂM FILTRE

- metode de optimizare



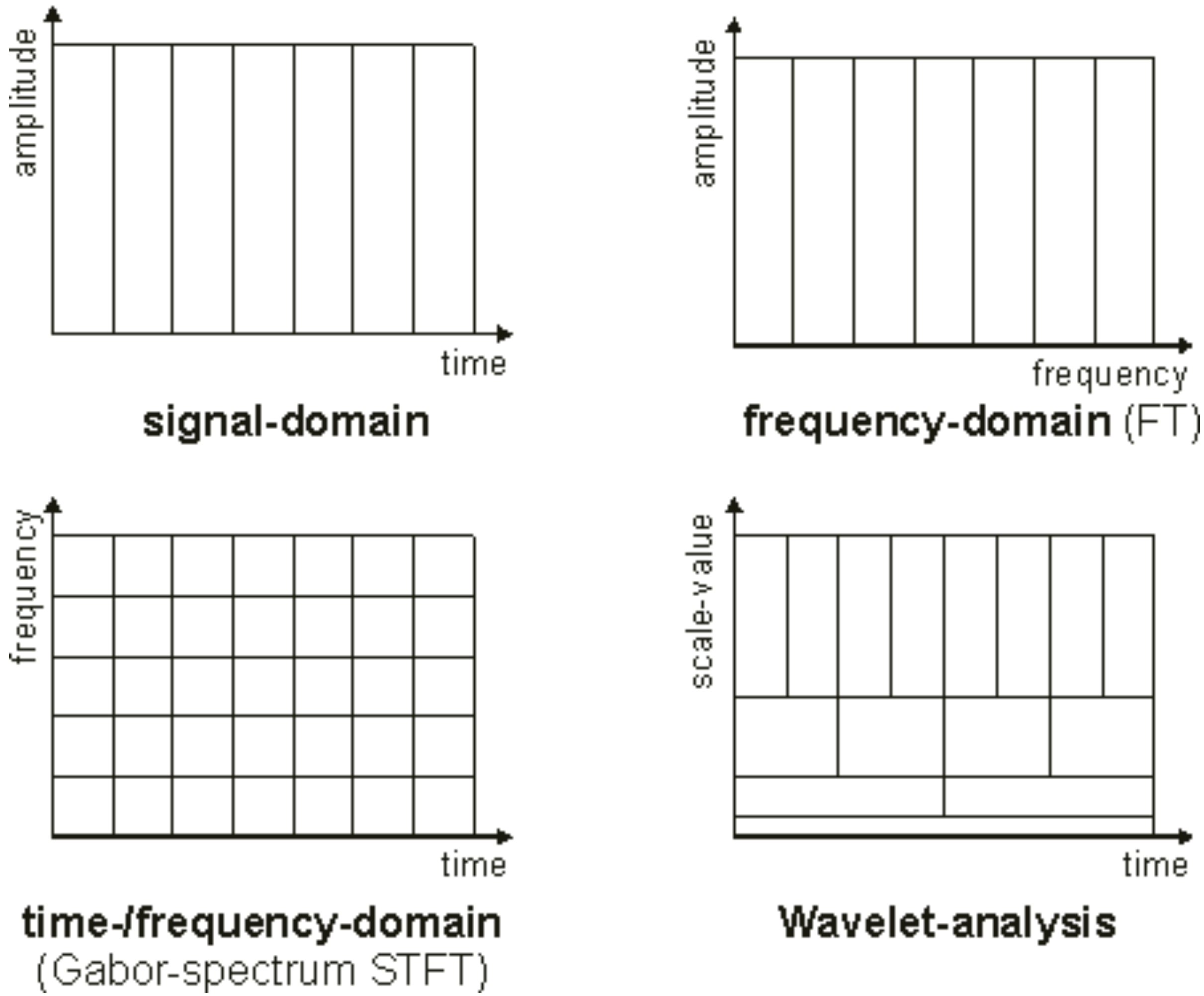
CUM PROIECTĂM FILTRE

- metode standard pentru filtrare frecvențe înalte: Blackman, Cebîșev, Kaiser



WAVELETS

- amintiți-vă principiu incertitudinii timp vs. frecvență



WAVELETS - HAAR

- transformata Haar de dimensiune 2 este echivalentă cu transformata Fourier

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- pentru toate celelalte dimensiuni:

$$\mathbf{H}_{2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_n \otimes [1 \quad 1] \\ \mathbf{I}_N \otimes [1 - 1] \end{bmatrix}$$

- încă un exemplu:

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

WAVELETS - HAAR

- un ultim exemplu, care să clarifice structura:

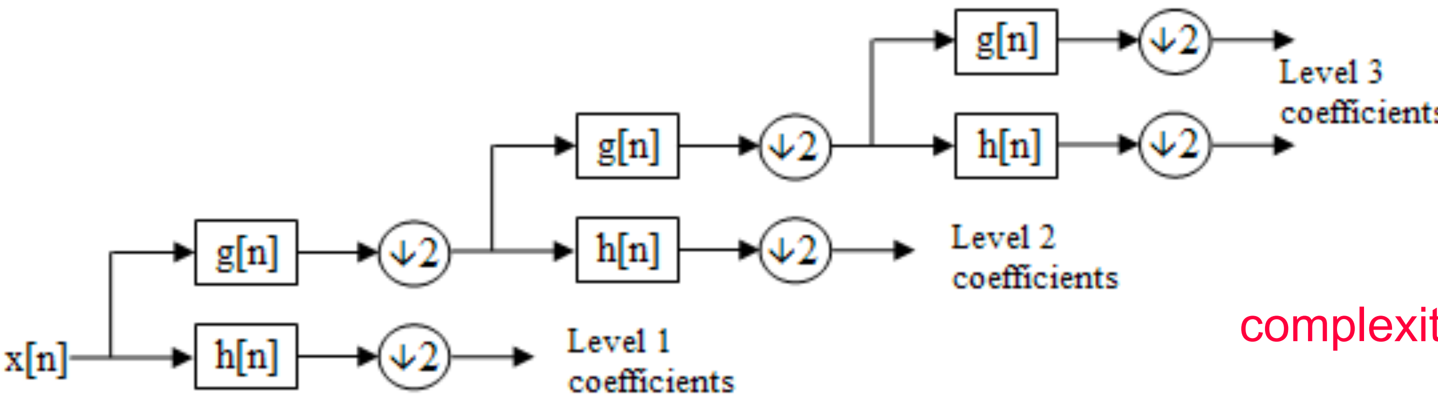
$$\mathbf{H}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- observați “balanța” dintre timp și frecvență
  - unele semnale de bază sunt localizate în timp (deci nu în frecvență)
  - altele sunt localizate în frecvență (deci nu în timp)
  - principiul incertitudinii: $\Delta t \Delta \omega \geq 2\pi$

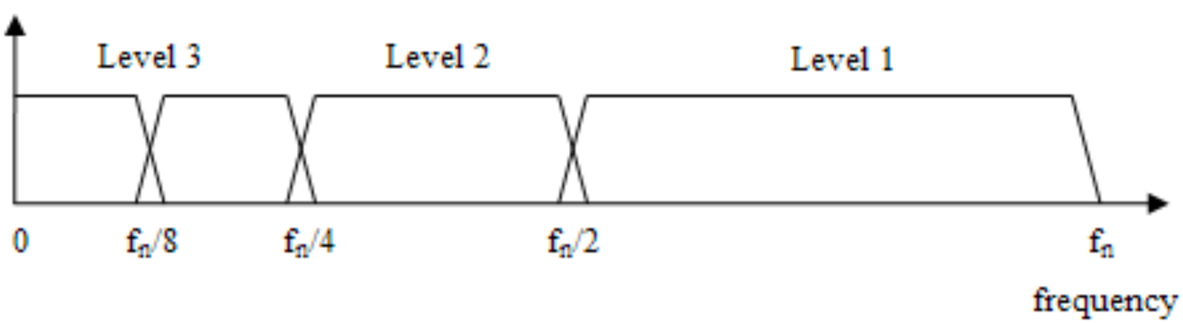
https://sepwww.stanford.edu/sep/prof/fgdp/c4/paper_html/node2.html#SECTION00110000000000000000

WAVELETS - HAAR

- așa cum pentru DFT există FFT, și pentru DWT există FWT

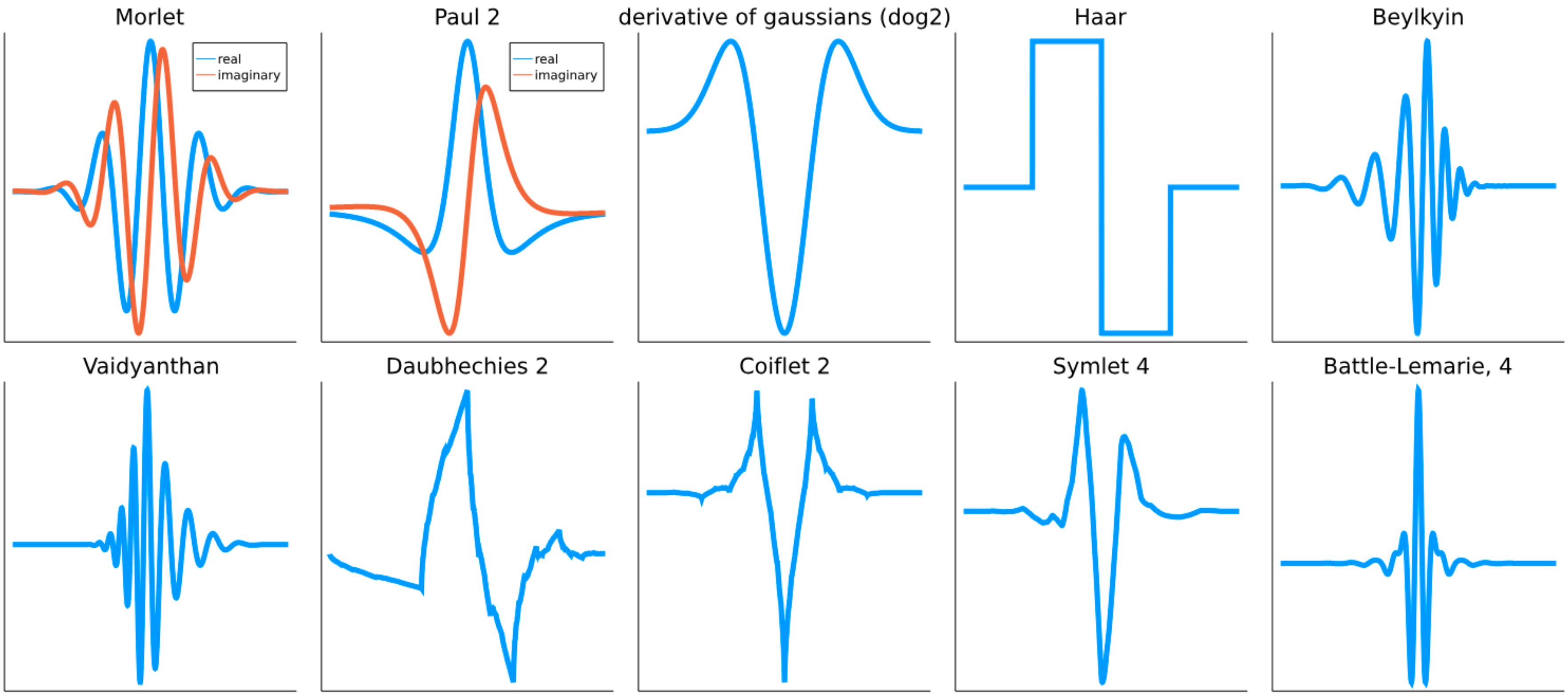


complexitate *O(n)*



https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_wavelet_transform

WAVELETS



https://docs.juliahub.com/ContinuousWavelets/JbYB7/1.0.0/coreType/